2020年度前期　機械工学概論と機械工学概論Ⅰ　期末テスト問題（2020年9月~~7~~8日1限　203号教室）

以下の設問に解答してください．解答の順番は自由です．解答用紙は**3枚提出してください**.

1. 図1の目盛り上に記入した値を読み取ると，2×0.666がいくつになるか説明してください.
2. 平地にて停止した車重700kgの車を20馬力一定で時速100㎞まで加速する時の所要時間を求めてください．馬力の単位はPSで，1PSは概ね75×9.80665 Wです.
3. 回転軸が，トルク T N･m で，一秒間に n 回転するとき，仕事率をSI単位で求めてください．（トルクは，力のモーメントと同じ意味で，回転方向にかかる力の大きさとその作用点と回転中心の距離の積です.）
4. 絶対値が図1の斜線部の面積と同じで，負の値を示す S が得られるように，空欄をうめて完成させた式(1)を回答用紙に記述してください．式(1)を完成させる段階で，逆関数は使いませんし，$w=F(z)$ も具体的な関数は指定していません.
5. 素材が均質で断面積が一定の棒があり，その棒の端を回転中心とする場合，棒の長さを2倍にすると慣性モーメントが何倍になるか，求めてください．慣性モーメントは，質量 dm の回転中心からの距離を r として，$r^2 dm$ を全体に積分することで求められます.
6. 式(2)(3)の関係を利用するオイラー法を参考に，表1において x=3.5 の dy/dx を算出してください.
7. 鉛直な y 軸上を滑らずに回転しながら下降する円形の物体について，回転する角度を θ，半径を r とし，円周上の点 P(x_P, y_P)の原点Oに対する位置が式(4)で表される．角 θ を時間 t の関数，α および半径 r を定数として，原点Oに対する点Pの運動の加速度を計算してください.
8. 式(5)の微分方程式と表2を基に角加速度 α_0，角速度 ω_1 と次の角度までの時間 t_0 を計算する式を作成してください．表2の背景が白い欄は数値が既知もしくは初期値として与えられると仮定し，時間 t は式(6)の関係があるとする．その他，臨機応変に計算してください.

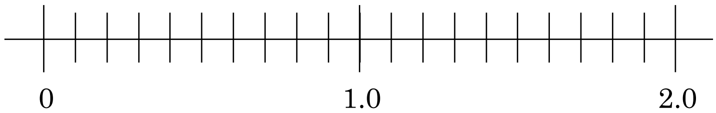

図1　目盛り

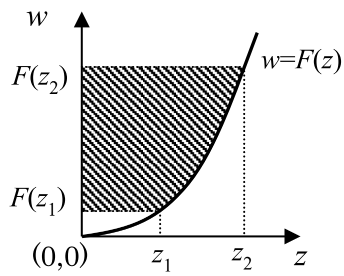

図2　z の関数 w と積分

表1　オイラー法を参考に dy/dx を計算する問題のための数値

x	1	2	3	4	6
y	12	6	4	3	2

$$S = \int_{\square}^{\square} \boxed{} = -\int_{\square}^{\square} \boxed{} \tag{1}$$

$$x_1 = x_0 + h \tag{2}$$

$$y_1 = y_0 + h\frac{dy}{dx} \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ -r\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\sin\alpha \\ r\cos\alpha \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$D(\varphi)\frac{d^2\varphi}{dt^2} = A(\varphi)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + B(\varphi)\frac{d\varphi}{dt} + C(\varphi) \tag{5}$$

$$t_{\varphi=i} = \frac{-\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{\varphi=i} + \sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{\varphi=i}^2 + 2\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_{\varphi=i}\left(\varphi_{\varphi=i+1} - \varphi_{\varphi=i}\right)}}{\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_{\varphi=i}} \tag{6}$$

表2　微分方程式で表された運動方程式に関係する係数や計算条件

角度 φ	係数 $D(\varphi)$	係数 $A(\varphi)$	係数 $B(\varphi)$	係数 $C(\varphi)$	角速度 $\frac{d\varphi}{dt}$	角加速度 $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$	次の角度までの時間
φ_0	D_0	A_0	B_0	C_0	ω_0	α_0(未知)	t_0(未知)
φ_1	D_1	A_1	B_1	C_1	ω_1(未知)	α_1(未知)	t_1(未知)
φ_2	D_2	A_2	B_2	C_2	ω_2(未知)	A_2(未知)	t_2(未知)

Moodle上での答案返却を予定．異議申し立てを9月9日10~13時と15～17時まで受け付ける予定です.

配点と解答例

問 1

2×0.666=1.332 だが, 目盛りは 0.1 が最小なので, 0.032 を切り捨てて，2×0.666=1.3 とする.

- （12 点）
- 注：2×0.666≒1.3 と記述してはならない.

問 2

加速度 a, 速度 v, 静止した位置からの距離 x, 発進してからの時間 t, 仕事率 P, 力 F, 車重 m に式（1）-(4)の関係がある．式(1)-(4)を整理すると式(5)が得られる.

$a=v/t$ (1)

$x=at^2/2$ (2)

$P=Fx/t$ (3)

$F=ma$ (4)

$t=（mv^2/2）/ P$ (5)

式(5)と与えられた条件から，所要時間 18.4 秒が得られる.

- 以上を適切に説明する（6 点）
- 計算式への数値の代入を最後にする（2 点）
- 適切な単位に変換して数値を代入し, 求めた数値に適切な単位をつける（2 点）
- 適切な（今回は 3 ケタ以下）の値で求める（2 点）
- 計算を誤らない（1 点）

問 3

力を F, 移動距離を L, 時間を t として,

$$P=\frac{FL}{t} \quad (1)$$

ここで回転中心からの力の作用点までの距離を r としたとき,

$$F=\frac{T}{r} \quad (2)$$

$$L=2\pi rnt \quad (3)$$

式(1) (2)(3)を T について整理し，式(4)を得る.

$$P=2\pi nT \quad (4)$$

以上より，$2\pi nT$ W を得る（10 点）

問 4

$$S=\int_{F(z_2)}^{F(z_1)} zdw=-\int_{F(z_1)}^{F(z_2)} zdw$$

- （20 点）

問 5

長さ L の棒の端を回転中心とする慣性モーメント I_L は，回転中心を $r=0$ とし，積分範囲を 0 から L までとして，式(1)で表される．このとき，棒の断面積と密度をそれぞれ S，ρ とすると，dm は式（2）で表される．また長さ $2L$ の同様の棒の端を回転中心とする場合は，慣性モーメント I_{2L} が式（3）で示される．以上から式（4）により，某の長さを 2 倍にすると，棒の慣性モーメントは 8 倍になる.

$$I_L=\int_0^L r^2dm \quad (1)$$

$$dm=\rho Sdr \quad (2)$$

$$I_{2L}=\int_0^{2L} r^2dm \quad (3)$$

$$\frac{I_{2L}}{I_L}=\frac{(2l)^3}{(L)^3}$$

$$=8 \quad (8)$$

- 式(1)(2)の作成(6 点)
- 式(3)で適切に積分範囲を定める.（6 点）
- 8 倍になる旨の結論を導くを得る.（2 点）

問 6

式(2)(3)を整理すると式(6-1)が得られる.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1} \quad (6\text{-}1)$$

ここで 3 と 4 の間に 3.5 があり，式(6-1)より x が 3 から 4 の間の変化の割合を x=3.5 における dy/dx とする．よって表 1 と式(6-1)から

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3-4}{4-3}=-1 \quad (6\text{-}2)$$

以上より，x=3.5 において $dy/dx=-1$ である.

- $\frac{dy}{dx}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$を得る.（10 点）

- 傾きの数値解を得る．(1 点)

問 7

位置を時間 t で 2 階微分したものが加速度になる．

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_\mathrm{p} \\ y_\mathrm{p} \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} r \\ -r\theta \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}\cos\theta & \frac{d}{dt}(-\sin\theta) \\ \frac{d}{dt}\sin\theta & \frac{d}{dt}\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r\sin\alpha \\ r\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}(r\sin\alpha) \\ \frac{d}{dt}(r\cos\alpha) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -r\dfrac{d\theta}{dt} \end{pmatrix} - \frac{d\theta}{dt}\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r\sin\alpha \\ r\cos\alpha \end{pmatrix}$$

この式を更に時間 t で微分する．

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x_\mathrm{p} \\ y_\mathrm{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -r\dfrac{d^2\theta}{dt^2} \end{pmatrix}$$

$$-\frac{d^2\theta}{dt^2}\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r\sin\alpha \\ r\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$-\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r\sin\alpha \\ r\cos\alpha \end{pmatrix}$$

以上の計算で示される $\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x_\mathrm{P} \\ y_\mathrm{P} \end{pmatrix}$ が点 P の加速度である．

- 位置ベクトルを時間で 2 階微分すると加速度が得られる旨の説明をする(3 点)
- 速度の計算結果を得る (1 点)．なお微分の計算が終わっていない解答の場合は，計算結果を得たとはみなさない．
- 加速度の計算結果を得る(1 点).

問 8

式(5)から式(8-1)が得られる．

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{1}{D(\varphi)}\left\{A(\varphi)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + B(\varphi)\frac{d\varphi}{dt} + C(\varphi)\right\} \tag{8-1}$$

表の値を用いて角加速度 $\alpha 0$ は式(8-2)で表される．角度 φ_0 から φ_1 までの所要時間が式(6)で与えられており，t_1 は式(8-3)で表される．角度 ϕ_1 における角速度 ω_1 は式(8-4)で与えられる．

$$\alpha_0 = \frac{1}{D_0}(A_0\omega_0{}^2 + B_0\omega_0 + C_0) \tag{8-2}$$

$$t_0 = \frac{-\varphi_0 + \sqrt{\varphi_0{}^2 + 2\mathrm{a}_0(\varphi_1 - \varphi_0)}}{\mathrm{a}_0} \tag{8-3}$$

$$\omega_1 = \omega_0 + \alpha_0 t_0 \tag{8-4}$$

- 式(8-2)を得る．(12 点)
- 式(8-3)を得る． (1 点)
- 式(8-4)を示す．(2 点)